数理解析研究所講究録
176巻 1973年 105-128

解の一様安定性と概周期性

東北大 理 中島文雄

§1. まえがき

概周期系における解の安定性と概周期性との関連について，多くの人々により研究されて来た。特に周期系では次の結果が知られている[5]，

周期系において，一様安定かつ有界な解が存在すれば，概周期解が存在する。

以下，上の問題が概周期系でも成立するかという事を考えよう。先づ，上の結果は一般の概周期系では成立しない。即ち，ある3次元の非線型系では，一様安定かつ有界な解は存在するが，概周期解は存在しない。この事は§6で述べる。しかし，特殊な場合，例えば線型系や一次元の系では成立する。この事は§3～§5で述べる。以上の結果は，Favard[1]，[2]，Opial[3]の諸定理と密接に関連している。

§2．記号と定義．

R^nをn次元ユークリッド空間とし，$R^1=R$と表す。$x\in R^n$に対し，$|x|$でそのユークリッドnormを示す。A，Bを位相空間とした時，$C(A,B)$でAからBへの連続関数の全体を表す。

次の微分方程式系を考える

$$(*)\qquad \frac{dx}{dt}=f(t,x)\ ,$$

ここで，$t\in R$，$x\in R^n$ か $f(t,x)\in C(R\times R^n;R^n)$である。$(*)$の解で，$(t_0,x_0)\in R\times R^n$を通る任意の解を$x(t,t_0,x_0)$と表し，$x(t,t_0,x_0)$がすべての$t\in R$で定義されている時，

$$\sup_{t\in R}|x(t,t_0,x_0)|<\infty \text{ ならば “有界 (on } R\text{)”},$$

$$\sup_{t\geqq 0}|x(t,t_0,x_0)|<\infty \text{ ならば “有界 (}t\geqq 0\text{)”}$$

と表す。

$(*)$の解$x(t)$ (defined on R) に対し，2種類の安定性を定義し更に，それらが独立な概念であることを示す．

定義1． $x(t)$ が一様安定（uniformly stable）であるとは，$\forall \varepsilon>0$ に対し，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が定り $|x(t_0)-x_0|<\delta$ for some $t_0 \in R$ ならば

$$|x(t)-x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{for } t \geqq t_0.$$

定義2． $x(t)$ が Favard の意味で安定とは，$\forall \varepsilon>0$ に対し，$\delta=\delta(\varepsilon)>0$ が定り，$|x(0)-x_0|<\delta$ ならば，

$$|x(t)-x(t,0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{for all } t \in R.$$

特に，定義2において $x(t)$ が有界（on R）ならば，$x(t,0,x_0)$ も有界（on R）となり，有界な解は唯一つではない。以下，簡単のため一様安定，Favardの意味での安定を，各々 u.s，F－安定 と略記する。

u.s が F－安定を意味しない例を述べる。

$$(**) \quad \frac{dx}{dt}=\alpha(t)\,x\ ,$$

ここで，$x,\ t \in R$ で $\alpha(t)$ は概周期関数で，負値とする。すると $(**)$ の0－解は u.s であるが，有界（on R）な解は0－解唯一つしかないから，F－安定ではない。

次に，予-安定がu.sを意味しない例を述べる。
Favardの結果[1, p48]によれば，ある概周期関数$\alpha(t)$が存在して，これに対し(**)を考えると，その任意の解$x(t, t_0, x_0)$は有界(on R)となる。従って，0-解は予-安定である。他方，次の事も成立する

$$\inf_{t\leq 0} |x(t, t_0, x_0)| = 0 .$$

従って，0-解はu.sではない。

最後に，概周期関数$f(t)$に対し，関数族$H(f)$を定義する。

<u>定義 3</u>.

$$H(f) = \{ g(t) ; f(t+t_k) \to g(t) \quad \text{as } k \to \infty$$

uniformly on R for some sequence $\{t_k\}$ $\}$.

$H(f)$をfのclosed hullと呼ぶ。

§3. 線型概周期系.

我々の目的とする結果は定理3.1である。実は，その定理の仮定はFavardの定理の仮定の特殊な場合となっていることを示す。この事により，u.sは後者の定理の仮定の具体例として位置づけられる。

次の線型概周期系を考える

$$(3.1) \qquad \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t),$$

ここで $t \in R$, $x \in R^n$, また $A(t)$ は $n \times n$ 行列, $f(t)$ は n-vector で, その成分は概周期関数とする。

定理 3.1. 系 (3.1) が u.s な有界な解 ($t \geq 0$) を持てば, 系 (3.1) は概周期解を持ち, その module は $A(t)$ と $f(t)$ の module の和に含まれる.

Favard は次の結果を示している [1, P59].

定理 3.2. $A(t)$ の closed hull $H(A)$ の任意の元 $B(t)$ に対し, 次の系を考える

$$(3.2) \qquad \frac{dx}{dt} = B(t)x.$$

系 (3.2) の有界な解 (on R) $x(t)$ は 0-解でないならば

$$\inf_{t \in R} |x(t)| \neq 0$$

と仮定する。このとき, 系 (3.1) が有界な解 ($t \geq 0$) を持てば, 系 (3.1) は概周期解を持ち, その module は $A(t)$ と $f(t)$ の module の和に含まれる。

以下、定理3.1の仮定は定理3.2の仮定を意味することを示す。　系(3.2)の有界な解(on R)で一次独立なものの次元を m $(\leqq n)$ とする。その一組みを $\{x_j(t)\}_{j=1}^m$ で表す。$B(t)$ の概周期性より数列 $\{t_k\}_{k=1}^\infty$ が存在して，$k \to \infty$ の時，

$$t_k \to -\infty \quad , \quad \text{かつ} \quad B(t+t_k) \to B(t)$$

uniformly on R

となる。他方，$x_j(t)$ の有界性から $\{x_j(t+t_k)\}_{k=1}^\infty$ は R の任意のcompact set上で一様収束すると仮定して良い。その極限を，各々 $y_j(t)$ とすると，$y_j(t)$ は系(3.2)の有界な解となる。$\{y_j(t)\}_{j=1}^m$ が一次独立であることを示す。

ある定数 $\{c_j\}_{j=1}^m$ に対して

$$\sum_{j=1}^m c_j y_j(0) = 0$$

とする。

$$\sum_{j=1}^m c_j x_j(t_k) \to 0 \quad \text{as } t_k \to -\infty$$

となる。今，$\sum_{j=1}^m c_j x_j(t)$ は系(3.2)の解であり，その0-解

も、やはり u.s であるので

$$\sum_{j=1}^{m} c_j x_j(t) \equiv 0 \ 。$$

すると $\{x_j(t)\}_{j=1}^{m}$ の一次独立性より

$$c_1 = \cdots = c_m = 0 \ 。$$

従って、$\{y_j(t)\}_{j=1}^{m}$ の一次独立性が示された。故に、系 (3.2) の有界な解 (on R) $x(t)$ は

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j y_j(t) \quad \textit{for some constants } \{\lambda_j\}$$

と表わされる。今、$x(0) \neq 0$ とすると、

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j(t_k) \longrightarrow x(0) \qquad \text{as } t_k \to -\infty$$

であるから、ある正数 $\varepsilon > 0$ が取れて、十分大なる k_0 に対し

$$\left|\sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j(t_{k_0})\right| \geq \varepsilon > 0 。$$

系(3.2)の0-解はU.Sであるから，ある$\delta'>0$が存在して

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j(t)\right| \geq \delta' > 0 \quad \text{for } t \leqq t_{k_0}.$$

故に，$^{\forall} t \in R$に対して

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j y_j(t)\right| = \lim_{t_k \to -\infty}\left|\sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_j(t+t_k)\right| \geq \delta'.$$

従って

$$|x(t)| \geq \delta' \quad \text{for all } t \in R.$$

これで，定理3.2の仮定が導かれた。

§4. 一階単独の概周期系.

次の一階単独の概周期系を考える

$$(4.1)\qquad \frac{dx}{dt} = f(t, x) \qquad (n = 1),$$

ここで $t, x \in R$, $f(t,x) \in C(R \times R; R)$ で, $f(t,x)$ は $x \in R$ に対し一様に t の概周期関数であり, 次の意味でリプッツッ条件を満すとする, 即ち, $^{\forall}M > 0$ に対し, 定数 $L = L(M) > 0$ が存在して

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leqq L|x - y| \quad \text{for } t \in R,\ |x|, |y| \leqq M.$$

である. 系(4.1)における概周期解の存在について次の結果が知られている。

定理4.1, [3]. 系(4.1)において $f(t,x)$ は x について単調減少(あるいは増加)とする。このとき系(4.1)が有界な解(on R)を持てば, それは概周期解であり, その module は $f(t,x)$ の module に含まれる。

定理4.2 [2]. 系(4.1)において有界な解(on R) $x(t)$ が存在して，$x(t)$ は $\underline{S}$-安定で，更に $x(0)$ は [注, 4.1] の意味で単調な点とする。このとき，$x(t)$ は概周期解であり，その module は $f(t,x)$ の module に含まれる。

[注, 4.1]

(i) $f(t,x)$ が x について単調減少とは，$x \leqq y$ ならば

$$f(t,x) \leqq f(t,y) \quad \text{for all } t \in R$$

となることである。単調増加も同様に定義する。

(ii) $x(0)$ が単調な点であるとは，$^{\forall} x_0 \in R$ に対し

$$M(x_0) = \sup_{t \in R} x(t,0,x_0)$$

$$m(x_0) = \inf_{t \in R} x(t,0,x_0)$$

とするとき，$x_0 < x(0) < y_0$ ならば

$$M(x_0) < M(x(0)) < M(y_0)$$

かつ

$$m(x_0) < m(x(0)) < m(x_0) \quad 。$$

[注, 4.2]　定理4.1の仮定は特殊な場合を除いて定理4.2の仮定を意味する。特殊な場合とは，系(4.1)が有界な解(on R)を唯一つしか持たない場合である。その場合，概周期解の存在は明らかである。

我々は定理4.1, 4.2を次の定理に統一できる。

定理4.3.　もし系(4.1)がu.sな有界な解(on R)を持てば，それは概周期解であり，そのmoduleは$f(t,x)$のmoduleに含まれる。

定理4.3の略証は次の§で述べる。定理4.1, 4.2, 4.3の関連について述べる。先づ，定理4.1の仮定から定理4.3の仮定が導かれることは明らかである($f(t,x)$が単調増加の時は，時刻tを負の向きに考えれば良い)。次に定理4.2の仮定が定理4.3の仮定を意味することを示す。

定理4.4.　定理4.2における解$x(t)$はu.sである。

証明には次の補題が必要である。

補題．定理4.2の解 $x(t)$ に対し次の事が成立する，

$\forall \varepsilon>0$ に対し $\delta'=\delta'(\varepsilon)>0$ が存在して，ある $t_0\in R$ で $|x(t_0)-x_0|<\delta'$ ならば

$$(4.2)\qquad |x(0)-x(0,t_0,x_0)|<\varepsilon \text{。}$$

補題の証明を行う。$x(t_0)>x_0$ の場合を示す。$x(t_0)<x_0$ の場合も同様である．Favardは次の事を示している[2, P93]

有界な解 $y(t)\,(\neq x(t))$ に対し

$$(4.3)\qquad \inf_{t\in R}|x(t)-y(t)|\neq 0 \text{.}$$

$x(t)$ の下－安定性より，$x(0)$ の十分近くに $x_1<x(0)$ を取ると $x(t,0,x_1)$ は有界（on R）で，更に(4.3)より定数 $\gamma>0$ が存在して

$$x(t,0,x_1)+\gamma<x(t)\quad \text{for all } t\in R.$$

$\delta(\varepsilon) < \delta'$と取ると，ある$t_0 \in R$で

$$0 < x(t_0) - x_0 < \delta'$$

ならば，$x(t, t_0, x_0)$は$^\forall t \in R$で定義されて

$$x(t, 0, x_1) < x(t, t_0, x_0) < x(t) \quad \text{for all } t \in R.$$

今，補題が成立しないとすると，ある$\varepsilon_0 > 0$が存在して，かつ
自然数kに対し，$t_k, x_k \in R$が存在して

$$(4.4) \quad 0 < x(t_k) - x_k < \frac{1}{k}$$

かつ

$$\varepsilon_0 < x(0) - x(0, t_k, x_k)\text{。}$$

系(4.1)の解$y(t)$で，$y(0) = x(0) - \frac{\varepsilon_0}{2}$なるものを考えると，
(4.3)より，$\varepsilon_1 > 0$が取れて

$$y(t) < x(t) - \varepsilon_1 \quad \text{for all } t \in R$$

かつ，

$$x(0, t_k, x_k) < y(0)$$

であるから

$$x(t, t_k, x_k) < y(t) \quad \text{on } R \text{。}$$

従って,

$$x(t, t_k, x_k) < x(t) - \varepsilon_1 \quad \text{on } R.$$

$t = t_k$ とおくと,

$$\varepsilon_1 < x(t_k) - x_k \text{。}$$

(4.4)より $\frac{1}{k} > \varepsilon_1$ となり, kは任意であるから矛盾。

以上で補題の証明は終る。次に定理4.4の証明を行う。

$^\forall\varepsilon > 0$に対し, $\delta'(\varepsilon)$を補題に現れた定数, $\delta(\varepsilon)$ を下-安定の定数とする。$^\forall\varepsilon > 0$に対し, $\delta_0(\varepsilon) = \delta'(\delta(\varepsilon))$ と置くと, ある$t_0 \in R$で, $|x(t_0) - x_0| < \delta_0(\varepsilon)$ ならば補題より

$$|x(0) - x(0, t_0, x_0)| < \delta(\varepsilon) \text{。}$$

すると，$\mathcal{F}$-安定性より

$$|x(t)-x(t,t_0,x_0)|<\varepsilon \quad \text{on } R.$$

従って，$x(t)$ は u.s である。証明を終る．

§5. 定理4.3の証明．

定理4.3の証明を述べる。証明の前半は本質的に [2] あるいは [3] の議論に依る。

系(4.1)において、与えられた u.s な，有界な解(on R)を $\varphi(t)$ とする。$^\forall g \in H(f)$ に対し次の系を考える

$$(5.1) \qquad \frac{dx}{dt}=g(t,x).$$

(5.1)の解のある集合 $\mathcal{F}(g)$ を定義する，

$\mathcal{F}(g) \ni x(t)$ とは，ある数列 $\{t_k\}$ が存在して
$k \to +\infty$ の時，

$$f(t+t_k,x) \to g(t,x) \quad \text{uniformly on } R\times[a,b]$$

$$\varphi(t+t_k) \longrightarrow x(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } R.$$

ここで

$$a = \inf_{t\in R} \varphi(t) \quad , \quad b = \sup_{t\in R} \varphi(t) \; 。$$

すると $\mathcal{F}(g)$ は広義一様収束の意味で compact となり，その元はすべて U.S となる。

$\mathcal{F}(g)$ の minimal solution を定義する，

$$h = \inf \{ M(x(0)) - m(x(0)) \; ; \; x(t) \in \mathcal{F}(g) \}$$

と置く。ここで $M(x(0))$, $m(x(0))$ は [注, 4.1] の記号である。今、相空間は一次元であり，かつ $\mathcal{F}(g)$ は compact であるから、ある $x(t) \in \mathcal{F}(g)$ が存在して

$$M(x(0)) - m(x(0)) = h$$

となる。このような $x(t)$ の中で $m(x(0))$ が最小なものを $\mathcal{F}(g)$ の minimal solution と呼ぶ。$\mathcal{F}(g)$ の元は U.S であるから minimal solution は唯一つしか存在しない。それ故に、

次の事が知られる。$\mathfrak{F}(f)$ の minimal solution $\psi(t)$ に対し、次の条件を満す任意の数列 $\{t_k\}$ を考える

$k \to +\infty$ の時,

$$f(t+t_k, x) \to g(t, x) \quad \text{uniformly on } R \times [a, b]$$

かつ

$$\psi(t+t_k) \to \psi^*(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } R.$$

すると, $\psi^*(t)$ は $\mathfrak{F}(g)$ の minimal solution となる。

これは $\{\psi(t+t_k)\}$ の正規性を意味する。従って $\psi(t)$ の概周期性が示されたことになる。

最後に $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ を示す。仮りに $\varphi(0) > \psi(0)$ とする。($\psi(0) > \varphi(0)$ の場合も同様である)。$\varphi(t)$ の u.S より $\varepsilon > 0$ が存在して

$$(5.2) \qquad \varphi(t) > \psi(t) + \varepsilon \quad \text{for } t \leqq 0.$$

他方, $\psi(t) \in \mathfrak{F}(f)$ より

$$a \leqq \psi(t) \leqq b \quad \text{on } R.$$

$$\delta = \inf_{t \in R} (\varphi(t) - \psi(t)) \geqq 0$$

と置くと，

$$\inf_{t \in R} \varphi(t) \geq \delta + \inf \psi(t)。$$

従って， $a \geqq \delta + a$ となり，$\delta = 0$ が結論される。故に，

$$\inf_{t \in R} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0$$

であるが，(5.2)より

$$\inf_{t \geq 0} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0 。$$

$\varphi(t)$ の u.s より

$$(5.3) \quad \lim_{t \to \infty} (\varphi(t) - \psi(t)) = 0 。$$

今，数列 $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ とある関数 $\varphi^*(t)$ が取れて，$k \longrightarrow +\infty$ の時

$$s_k \to -\infty,$$

$$f(t+s_k, x) \to f(t, x) \quad \text{uniformly on } R \times [a, b].$$

$$\psi(t+s_k) \to \psi(t) \quad \text{uniformly on } R$$

$$\varphi(t+s_k) \to \varphi^*(t) \quad \text{uniformly on any compact set in } R.$$

すると $\varphi^*(t) \in \mathcal{F}(f)$ となり，(5.2)より

$$(5.4) \qquad \varphi^*(t) \geqq \psi(t) + \varepsilon \quad \text{for all } t \in R.$$

(5.3)より

$$(5.5) \qquad \varphi^*(t) > \varphi(t) \quad \text{for all } t \in R.$$

(5.5)より，ある $\delta' > 0$ が取れて

$$(5.6) \qquad \varphi^*(t) \geqq \varphi(t) + \delta' \quad \text{for } t \leqq 0.$$

他方， $b = \sup_{t \leqq 0} \varphi(t)$ か $b = \sup_{t > 0} \varphi(t)$ であるが

前者の場合は，(5.6)に矛盾する。後の場合は(5.5)より

$$b = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \varphi(t)$$

となり，(5.3)より

$$b = \overline{\lim_{t\to\infty}}\, \psi(t) \quad .$$

すると(5.4)より

$$b \geqq \sup_{t\in R} \varphi^{*}(t) \geqq \sup_{t\in R} \psi(t) + \varepsilon = b + \varepsilon \quad .$$

これは$\varepsilon>0$に矛盾する。以上で$\varphi(t)\equiv\psi(t)$が証明された。

[注, 5.1]　定理4.3の仮定において解の一様安定性が満せないことは、Opialの例[4]から知られる。

§6. 概周期解を持たない概周期系。

次の概周期系を考える。

$$
(6.1)\begin{cases}
(イ)\cdots\cdots\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = -\alpha(t)y \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = \alpha(t)x\end{cases} \\[8mm]
(ロ)\cdots\cdots \dfrac{dz}{dt} = \begin{cases} 1-(x^2+y^2) & \text{for } x^2+y^2 \leqq 1 \\[2mm] 0 & \text{for } x^2+y^2 > 1, \end{cases}
\end{cases}
$$

ここで
$$\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\cos\left(\frac{t}{2^k}\right).$$

次の事が成立する。系(6.1)はu.Sな有界な解(on R)は持つが概周期解は持たない。

先づ，(イ)は0－解以外に概周期解を持たないことを示す、系(イ)において，$x+iy = w \in \mathbb{C}$ とおくと(イ)は次の方程式と同値である

$$\frac{dw}{dt} = i\alpha(t)w \qquad (i = \sqrt{-1})$$

この基本解は

$$(6.2) \qquad w(t) = \exp\left(i \int_0^t \alpha(s) ds \right).$$

Favard は次の事を示している。

(6.2) が概周期的である必要十分条件は

$$\int_0^t \alpha(s) ds = ct + \text{概周期関数}$$

の形に表現されることである。ここで c は $\alpha(t)$ の平均値である。

今の場合、$\alpha(t)$ の平均値は 0 であり ($c=0$), その積分は非有界であるから上の事は成立しない。即ち (6.2) は概周期的ではない 従って (イ) は 0 - 解以外に概周期解を持たない。

次に (6.1) は概周期解を持たない事を示す。もし (6.1) が概周期解 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ を持てば, $\{x(t), y(t)\}$ は (イ) の概周期解となるから $x(t) = y(t) = 0$ on R となる。すると (12) より

$$\frac{dz}{dt} = 1$$

となり, $z(t)$ の概周期性 (実は有界性) に矛盾する。

最後に，(6.1)の解 $\{x(t), y(t), z(t)\}$ で，

$$x^2(0)+y^2(0)>1$$

なる解を考える。するとこの解に対し (6.1) は次の系となる．

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha(t)y \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha(t)x \\ \dfrac{dz}{dt} = 0 \end{cases}$$

従って，$\{x(t), y(t), z(t)\}$ は有界 (on R) で，その十分近くから出る解に対し u.s である．

参考文献

[1]. J. Favard, Sur les équations differentielles linéaires à coefficients presque-periodiques, Act. Math., 51(1928), 31-81.

[2]. ———, Sur les équations differentielles scalaires presque periodiques, Journ. de Math., 1964, (87-97).

[3]. Z. Opial, Sur les solutions presque-periodiques des équations differentielles du premir et du second ordre, Ann. Polon. Math., 7(1959), 51-61.

[4]. ———, Sur une équation differentielle presque-periodique sans solution presque-periodique, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 9(1961), 673-676.

[5]. T. Yoshizawa, Some remarks on the existence and stability of almost periodic solutions, Stud. Appl. Math. 5.